

Umjetnost i matematika

„Matematika ne leži ukopana usred kontinenata egzaktih znanosti; ona je na njegovim obalama, uz okean umjetnosti” – rekao je Vladimir Devidé, poznati matematičar, akademik, promotor japanske književnosti i kulture, te pokretač haiku poezije u Hrvatskoj. Stoga pođimo u šetnju obalama toga okeana.

Muzika

Možda su matematika i muzika jedno te isto... samo što se jedno vidi, a drugo čuje... Muziku ne možeš vidjeti, matematiku ne možeš čuti... a možda su isto...” – riječi su književnika i filmskog scenariste Abdulaha Sidrana, a već citirani Vladimir Devidé pitao se: *Ne bi li se muzika mogla opisati kao matematika osjećaja, a matematika kao muzika, razuma? Njihov duh je isti. Tako muzičar osjeća matematiku, a matematičar misli muziku.*”

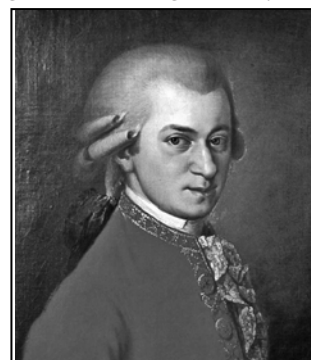
Matematiku možemo pronaći već kod samih osobina zvuka (frekvencija, zvučni valovi, rezonanca...) koje se mogu predočiti matematičkim izračunima, ali i u mjeri, ritmu i kompoziciji. U Pitagorejskoj školi muzika se proučavala zajedno s geometrijom, aritmetikom i astronomijom, a njena povezanost s matematikom **proteže se do današnjih dana kada se na teoriju muzike primjenjuje teorija grupa**. Prvi je to učinio na prijelazu 19. u 20. stoljeće njemački teoretičar muzike **Hugo Riemann** (1849. – 1919.) proučavajući odnose među tonovima i intervalima.

Poznato je da napeta žica određene debljine proizvodi ton. Što je žica kraća, to je ton viši, a ako je skratimo na pola, dobit ćemo ton za oktavu viši. Još su pitagorejci otkrili da je omjer frekvencija nekog tona i za oktavu višeg 1 : 2. Kako izgledaju omjeri frekvencija ostalih tonova, prikazano je u tablici:

C	D	E	F	G	A	H	C1
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

U oktavi imamo pet intervala (stupnjeva) cijelih tonova (D/C, E/D, G/F, A/G i H/A) i dva polutona (F/E i C1/H), a crne tipke daju nam još pet polutonova, no treba napomenuti da dva polutona ne daju cijeli ton, što je vidljivo i iz tablice. Uočljiv je geometrijski niz kod omjera frekvencija čistih tonova (C, D, E i G, A, H). O tome hoće li neki tonovi zajedno zvučati ugodno ili neugodno, tj. biti konsonantni ili disonantni, govori Pitagora u svome zakonu malih brojeva: dva su tona konsonantna ako su im frekvencije u omjeru malih brojeva. Što to znači? Omjer C1/G jednak je 4/3 (2:3/2), za G/C iznosi 3/2, za D/C 9/8, dok je za H/G ili E/C taj omjer čak 81/64. Što su manji brojevi u omjeru, to su tonovi konsonantniji.

Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez također se mogu uočiti u glazbi. U *Koncertu za gudače, udaraljke i čele- stu Béle Bartóka* (1881. – 1945.) glavni dio započinje u 55. taktu od 89 (89/55=1.61818..., što je omjer zlatnog reza), a uvodni dio na ksilofonu je u ritmu Fibonacci- vih brojeva 1 : 1 : 2 : 3 : 5 : 8 : 5 : 3 : 2 : 1 : 1. Zbor *Aleluja* iz *Mesije Georga Friedricha Händela* (1685. – 1759.) sastoji se od 94 takta, a jedan od najvažnijih elemenata u tome djelu, ulazak solo truba, jest između 57. i 58. takta (omjer je 1.6). U sonatnim oblicima **Wolfganga Amadeusa Mozarta** (1756. – 1791.) omjer ekspozicije (upo-



Slika 1. Wolfgang Amadeus Mozart

znavanje

teme) i provedbe i reprize (razvoj i ponavljanje teme) često je upravo zlatni rez.



Slika 2. Johann Sebastian Bach

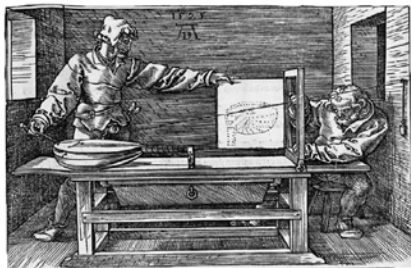
U mnogim muzičkim djelima možemo pronaći razne oblike simetrije, i to u dinamici, tempu, visini tonova, odnosno u melodiji, harmoniji i tonalitetu, te u samoj formi djela. Često je susrećemo kod **Johanna Sebastiana Bacha** (1685. – 1750.), ali i mnogih drugih. Ponavljanje teme odnosno refrene možemo promatrati kao translaciju. Rondo je primjer glazbenog oblika u kome se isprepliću osna simetrija i translacija.

Krajem osamdesetih godina prošloga stoljeća u SAD-u se pod utjecajem **Kinga Crimsona** i **Stevea Reicha** razvio novi muzički smjer – *math rock*, vrsta eksperimentalnoga rocka s elementima indie rocka. Karakteriziraju ga asimetrični ritmovi, disonantni tonovi i neparne mjere (7/8, 11/8 i 13/8, dok je kod običnoga rocka dominantna mjera 4/4 s naglašenim drugim i četvrtim taktom).

I broj π pronašao je svoje mjesto u muzici. **Michael John Blake** notama je pridružio brojeve pa odsvirao π . Kako zvuči broj π možete pogledati i poslušati na <https://www.youtube.com/watch?v=wK7tq7LON8E>.

Likovna umjetnost

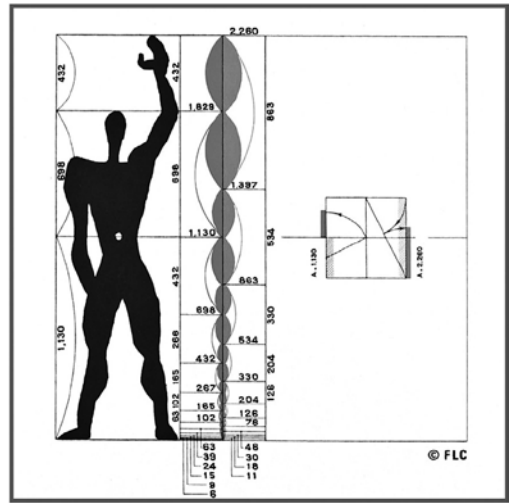
Matematiku je najlakše prepoznati u likovnoj umjetnosti iz vrlo jednostavnog razloga – ona se vidi. Puno se pisalo o prisutnosti matematike u slikarstvu i arhitekturi, pa da zato samo ukratko ponovimo najosnovnije.



Slika 3. Dürerova studija perspektive

Većina slikara u svome stvaralaštvu koristi perspektivom. Perspektiva je način prikazivanja prostora na ravnoj plohi, odnosno stvaranje iluzije o dubini prostora. Postoji više vrsta perspektive: vertikalna, obrnuta, atmosferska (zračna), koloristič..., no najčešća je linearna perspektiva. Ona se temelji na prirodnom zakonu da se udaljavanjem od promatrača likovi smanjuju razmjerno udaljenosti i svi nestaju u jednoj tački. Još se naziva i geometrijska, pravilna, matematička i iluzionistička perspektiva, a u njoj vrlo lako prepoznamo homotetiju. Otkriće linearne perspektive pripisuje se talijanskom arhitektu i kiparu **Filippu Brunelleschiju** (1377. – 1446.). Nakon njega perspektivu su proučavali **Masaccio** (1401. – 1429.), talijanski slikar čije se *Sveto Trojstvo* smatra jednom od prvih renesansnih slika u kojima je upotrijebljena linearna perspektiva, te **Piero della Francesca** (1412. – 1492.), talijanski ranorenesansni slikar koji je svojim suvremenicima bio poznat i kao matematičar. Osim što je svoje slike matematički planirao do najsitnijeg detalja, napisao je i tri matematička traktata: *Traktat o abakusu*, *Kratka knjiga o pet pravilnih tijela* i *O perspektivi u slikarstvu*. **Albrecht Dürer** (1471. – 1528.) izučavao je perspektivu pomoću napete niti i staklene ploče. Zanimala ga je i matematika, i to ne samo radi upotrebe u slikarstvu. Napisao je opsežno djelo o geometrijskoj konstrukciji epicikloide, krivulje koju opisuje neka tačka kružnice koja se kotrlja po nekoj drugoj nepomičnoj kružnici, bavio se geometrijskim konstrukcijama koje se mogu provesti samo upotrebom šestara s fiksnim otvorom, pronašao je dobro aproksimativno rješenje problema trisekcije ugla, a jedan magični kvadrat dimenzija 4×4 čak je unio u svoj bakrorez *Melankolija*.

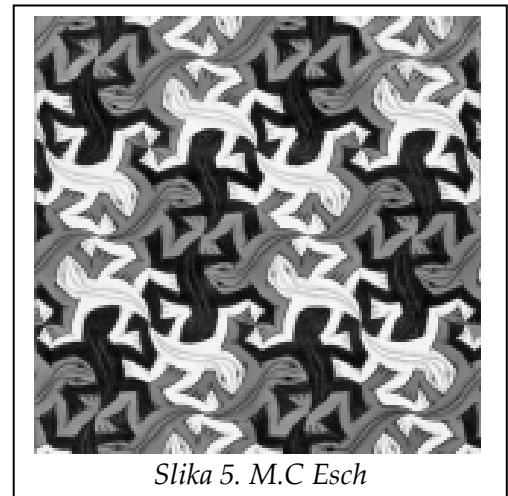
Linearnu, ali često i zračnu perspektivu (što su predmeti dalji, oni su bljeđi, mekši i gube se s daljinom u plavetnilo, dok su oni bliži oštrije i jačih boja) koristio je i veliki **Leonardo da Vinci** (1452. – 1519.), a ta je perspektiva svoj puni zamah doživjela u baroknom slikarstvu 17. i 18. stoljeća. Da Vinci je bio renesansni čovjek u punom smislu, slikar, kipar, matematičar, fizičar, inženjer, izumitelj... Proučavao je proporcije ljudskoga tijela i konstrukcije pravilnih poliedara te napisao nekoliko kraćih tekstova u kojima se izmjenjuju filozofska razmatranja i traganje za praktičnim primjenama. U tim razmatranjima ima i takvih koje bismo mogli smatrati začetkom upotrebe infinitezimalnih metoda. Koristio je i zlatni rez, čija povijest počinje u starom Egiptu, iako se pronalazačima zlatnoga reza smatraju starogrčki matematičari čija je znanja objedinio rimski arhitekt **Marcus Vitruvius Polio** iz 1. st. pr. Krista u svome djelu *Deset knjiga o arhitekturi*. Primjer da Vincijevih studija proporcija ljudskoga tijela je znameniti *Vitruvijev čovjek* (čovjek s raširenim rukama i nogama upisan u krug i kvadrat). Na temeljima te studije i zlatnoga reza nastao je *Modulor*, antropologijska skala proporcija ljudskoga tijela francuskoga arhitekta **Le Corbusiera** (1887. – 1965.). Primjenjuje se u arhitekturi (visina gazišta stepenica...), izradi namještaja (visina stolova, stolica...) i drugdje..



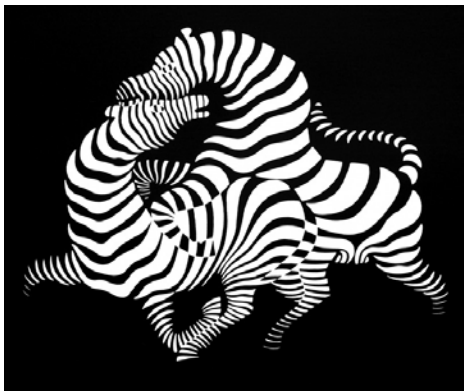
Slika 4. Le Corbusier Corbusier – Modulor

Primjenu matematike u slikarstvu vidimo i u teselaciji, prekrivanju ravnine sukladnim likovima. Postoje samo tri pravilne teselacije (jednakostraničnim trouglovima, kvadratima i pravilnim šesterougaonicima).

Zanimljive su i polupravilne teselacije, one koje sadrže kombinaciju različitih pravilnih mnogouglova, a njih ima osam. Slikari su teselaciju podigli na jednu višu razinu koristeći razne likove, te translaciju, rotaciju i osnu simetriju. Različitih tipova simetrije ima tačno 17, što je dokazao ruski kristalograf **E. S. Fedorov** 1891. godine. U dokazu se koriste metode iz teorije grupa pa se stoga i govori o 17 grupa simetrije. Barem od tih 17 grupa simetrije možemo pronaći u djelima nizozemskog slikara **Mauritsa Cornelisa Eschera** (1898. – 1972.). Iako nije posjedovao matematičko obrazovanje, na njega su utjecali matematičari **George Pólya** i **Roger Penrose**. Osim teselacije, u njegovim radovima prepoznajemo i beskonačnost, involuciju, dualnost te euklidsku i hiperboličku geometriju. Mnogobrojne simetrije i pravilne uzorke nalazimo i u arapskoj umjetnosti. Preljepje arabeske ukrašavaju džamije i druge građevine islamskoga svijeta, a njihovu ljepotu rano su uočili i počeli primjenjivati i europski umjetnici.



Slika 5. M.C Esch



Slika 6. V. Vasarely: Zebra

Dvadeseto stoljeće donosi velike promjene u likovnoj umjetnosti. Smatra se da je prvu apstraktnu sliku naslikao ruski slikar **Vasilij Kandinski** (1866. – 1944.) 1910. godine, iako se neki elementi apstraktnosti nalaze i kod ranijih umjetnika. Krajem pedesetih i početkom šezdesetih godina pojavljuje se op-art, optička umjetnost u kojoj umjetnici stvaraju razne optičke iluzije primjenom optike i geometrije. Jedan od najpoznatijih op-art slikara je **Victor Vasarely** (1906. – 1997.) čija se slika *Zebra* smatra prvim djelom u tom žanru. Posjetite li Pečuh, nemojte propustiti priliku da razgledate njegov muzej. U umjetnost se uvode i računari, te umjetnici počinju koristiti razne programe za generiranje slika, pri čemu se često koristi teorija fraktala. Početkom šezdesetih godina pojavljuje se op-art, optička

umjetnost u kojoj umjetnici stvaraju razne optičke iluzije primjenom optike i geometrije.. U algoritamskoj umjetnosti slike se generiraju na temelju algoritama koji u potpunosti opisuju način njihova nastanka, te strukturu i boju slike. Neki od predstavnika algoritamske umjetnosti su **Roman Versatko**, **Jean-Pierre Hébert**, **Manfred Mohr** koji je napravio projekciju šesterodimenzijske hiperkocke, tenašin- formatičar i grafičar **Vlatko Čerić**.

Što reći o matematici u arhitekturi? Suvišno je govoriti o egipatskim piramidama, grčkim i rimskim amfiteatrima, Taj Mahalu, oktagonima, mostovima... Zato ćemo samo spomenuti jednu manje poznatu građevinu, crkvu Notre-Dame la Grande u Poitiersu u Francuskoj. Pogledajte i uvjerite se sami koliko ima matematike u ovom prekrasnom sakralnom objektu.



Slika 7. Crkva Notre-Dame la Grande u Poitiersu

Književnost

Povezanost književnosti i matematike nije toliko očita poput, primjerice, povezanosti matematike i slikarstva, ali ona ne samo da postoji, nego možemo razlikovati nekoliko aspekata te povezanosti. Sjedne strane nižu se književnici koji su po svojem obrazovanju matematičari, a s druge strane priznati matematičari koji su nam u nasljeđe ostavili i neke uspješne književne uratke. Osim toga, postoji i niz književnih djela u čijem sadržaju možemo pronaći različite elemente matematike.

Među brojnim književnicima koji su diplomirani matematičari najpoznatiji su ruski nobelovac **Aleksandar Solženjicin** (1918. – 2008.) i **Carol Lewis** (1832. — 1898.), autor poznate *Alise u zemlji čudesa*, ali oni nisu jedini. Matematičari su i neki suvremeni pisci, npr. Australac **Greg Egan**, Englez **Stephen Baxter**, Argentinac **Guillermo Martinez** te hrvatski pjesnik i prevoditelj **Mate Maras**. Srpski književnik **Vladimir Tasić** (1965.) doktorirao je matematiku i radi kao sveučilišni profesor, a kvalitetu njegova književnog stvaralaštva dokazuju brojne nagrade i priznanja, od kojih je najznačajnija NIN-ova nagrada za roman *Kiša i hartija*.

Ruđer Bošković (1711. – 1787.) poznat je kao znanstvenik (matematičar, fizičar i astronom) i filozof, no manje je poznato da je napisao i nekoliko književnih djela. Osim djela *Pomrčina Sunca i Mjeseca*, koje je znanstveni prikaz astronomije napisan u heksametarskom stihu, svakako treba spomenuti i *Pisma, pjesme i rasprave*. I veliki **Blaise Pascal** (1623. – 1662.), francuski matematičar, fizičar i filozof, uspješno se okušao u književnosti. Njegovo djelo *Misli*, u kome iznosi svoja razmišljanja o

kršćanstvu, objavljeno je i u Hrvatskoj. Već spomenuti **Vladimira Devidéa** (1925. –2010.), matematičara, japanologa i prvoga hrvatskog haiku pjesnika čije ime nosi nagrada koja se svake godine u Osaki dodjeljuje za najbolji haiku na engleskom jeziku.

I neki književnici bez formalnoga matematičkog obrazovanja ostavili su za sobom trag u matematici. **Raymond Queneau** (1903. – 1976.), autor slavnihi *Stilskih vježbi*, napisao je i nekoliko eseja o matematici, a književnik **Martin Gardner** (1914. – 2010.) više od četvrt stoljeća imao je znanstveno-popularnu kolumnu *Matematičke igre (Mathematical Games)* u časopisu *Scientific American*, za što je višestruko nagrađivan.

U nekim književnim djelima matematika je prisutna ili u jednome dijelu fabule ili pak prožima cjelokupno djelo. Primjerice, u drami *Gospoda Glembajevi* **Miroslava Krležé** (1893. – 1981.) na samome početku Leone spominje matematičkoga velikana Leonharda Eulera, dok je gotovo cjelokupna zbirka dječjih pjesama **Paje Kanižaja** (1939. – 2015.) *3čave pjesme* posvećena matematici. Tu su pjesme o brojevima, o rombu koji je bio kvadrat ali se zbog radoznalosti naginjao, kao i mnoge druge. U *Gulliverovim putovanjima* **Jonathan Swift** (1667. – 1745.) uspješno primjenjuje proporcionalnost računajući koliko bi se Liliputanaca moglo nahraniti hranom koju pojede Gulliver ili odjenuti tkaninom koja je potrebna za izradu njegova odijela. U romanu **Umberta Eca** (1932. – 2016.) *Ime ruže* matematika se upravo veliča: Matematičke spoznaje su postavke koje je naš razum izgradio tako da uvijek funkcioniraju kao istinite, bilo zato što su urođene, bilo zato što je matematika pronađena prije drugih znanosti.", dok **Filippo Tommaso Marinetti** (1876. – 1944.), začetnik futurizma i autor *Futurističkog manifesta*, u svojoj pjesmi *Bitka težina+miris* ne koristi interpunkciju, ali upotrebljava znakove +, – i = te nekoliko brojeva.

Matematika se proteže i kroz čitav roman *Stric Petros i Goldbachova slutnja* grčkoga književnika **Apostolosa Doxiadisa**. Okosnicu toga romana čini hipoteza švicarskoga matematičara iz 18. stoljeća Christiana Goldbacha da se svaki parni broj veći od dva može prikazati kao zbir dvaju prostih brojeva. Brazilski književnik **Júlio César de Mello e Souza** (1895. – 1971.), također diplomirani matematičar, pod pseudonimom **Malba Tahan** objavio je knjigu *Čovjek koji je brojio*, koja se sastoji od 34 poglavlja u kojima se opisuju pustolovine glavnog junaka, a svaka pustolovina sadrži u sebi neki matematički problem, zanimljivost ili zagonetku koju on uspješno rješava.

Srednjevjekovnu simboliku brojeva nalazimo u djelima **Dantea Alighierija** (1265. – 1321.) i **Giovannija Boccaccia** (1313. – 1375.). Danteova *Božanstvena komedija* sastoji se od tri dijela: *Pakao*, *Čistilište i Raj*, a broj tri mističan je broj koji simbolizira Sveto Trojstvo. Svaki od ta tri dijela sastoji se od 33 pjevanja, što zajedno s uvodnim čini 100 pjevanja. Broj 100 ($10 \cdot 10$) smatran je savršenim brojem. U Čistilištu se duše čiste od sedam grijeha, a raspoređene su u sedam pojaseva te nakon čišćenja lete prema nebu i dolaze u devet rajskih nebesa. Devet je bilo i krugova Pakla i brežuljaka Čistilišta, a 9 je $3 \cdot 3$. I u *Dekameronu* oca novele G. Boccaccia prisutna je simbolika brojeva. Djelo se sastoji od 100 novela nastalih u 10 dana. Pojavljuju se tri mladića i sedam djevojaka. Djevojke simboliziraju sedam vrlina, a broj sedam koji simbolizira savršenstvo susrećemo i u kršćanstvu (u sedam je dana Bog stvorio svijet, sedam je smrtnih grijeha i sedam darova Duha Svetoga) i u drugim religijama (sedamj ekrakova Menore, islamskih rajskih nebesa, Budinih koraka, čakri...).

Osječka književnica **Jasna Horvat** (1966.) pokazala je da je zlatni rez moguće koristiti i u književnosti. Ona je 2011. godine objavila roman *Auron*. Posebnost ovoga romana u tome je što autorica svjesno upotrebljava zlatni rez i u kompoziciji i u samome sadržaju. Središnja točka priče je poglavlje *Pupak*, koja dijeli tekst na dva dijela. Prvi dio ima 21 poglavlje i pisan je u sadašnjosti, a drugi 13 i pisan je u prošlosti (21 i 13 Fibonaccijevi su brojevi i $21:13=1.615$), a zlatni rez očituje se na mnogo mjesta u

romanu, primjerice u omjeru muških i ženskih pripovjedača.

Vjerujem da ima još puno sličnih primjera, ali i ovi pokazuju da književnost i matematika ipak nisu tako udaljene kako se to na prvi pogled čini.

Umjesto zaključka

Nadam se da je ovaj članak probudio ili produbio vaš interes za umjetnost. Završit ću riječima Blaisea Pascala: Kudikamo je bolje znati o „vakoj stvari ponešto, nego o jednoj sve.“¹

¹ Sruk S, Umjetnost i matematika, Poučak, Vol 20 No 79, 2019